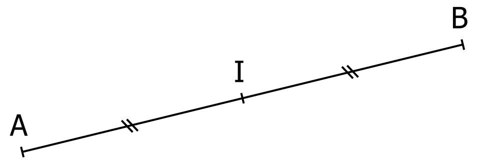
EXERCICE 3C.1

I est le milieu de [AB].



Ecrire plus simplement les vecteurs suivants :

$\vec{u} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$

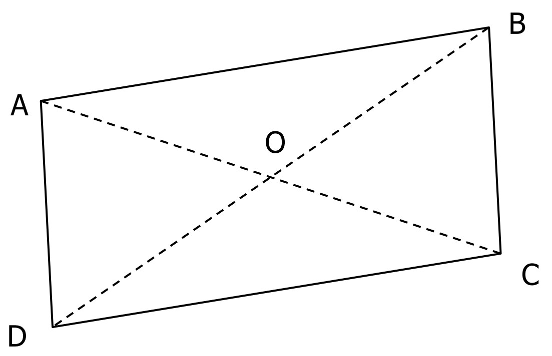
$\vec{v} = 2\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AI}$

$\vec{w} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{NA} - \overrightarrow{BI} + 2\,\overrightarrow{IA}$

(M et N sont deux points quelconques)

EXERCICE 3C.2

ABCD est un parallélogramme de centre O.



Montrer que tous ces vecteurs sont nuls.

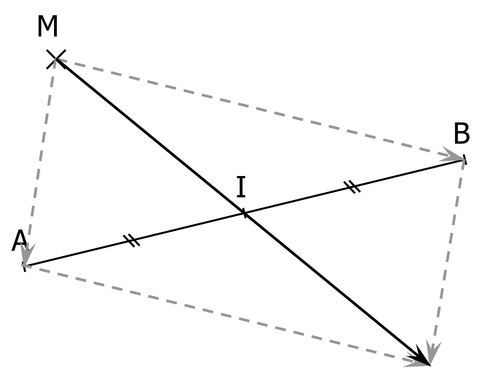
$\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

$\vec{v} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{DO}$

$\vec{w} = \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

EXERCICE 3C.3

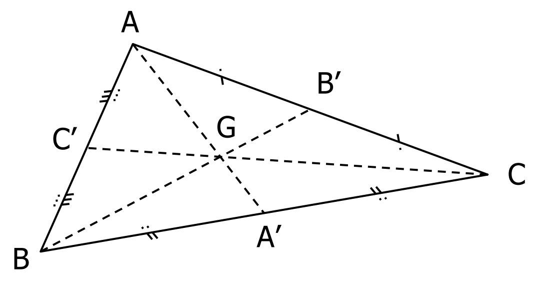
Soit I le milieu du segment [AB] et M un point n'appartenant pas à (AB).



Montrer que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$

EXERCICE 3C.4

ABC est un triangle, G est le centre de gravité de ce triangle.

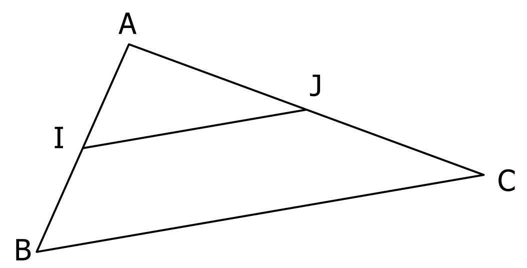


Montrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

(On pourra utiliser la propriété démontrée dans l'EXERCICE 3C.3, et se souvenir que le centre de gravité se trouve aux deux tiers de la médiane en partant du sommet)

EXERCICE 3C.5

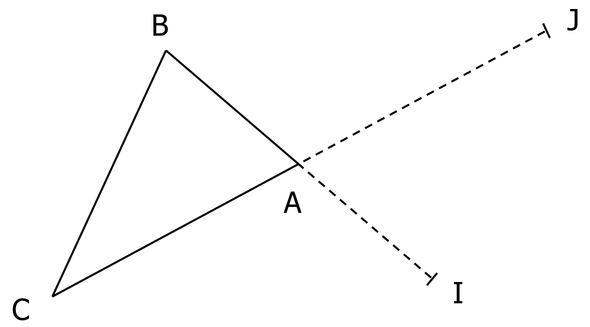
ABC est un triangle, I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC].



Montrer que $\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{IJ}$.

EXERCICE 3C.6

ABC est un triangle. I et J sont les symétriques respectifs de B et C par rapport à A.



Exprimer en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ les vecteurs suivants :

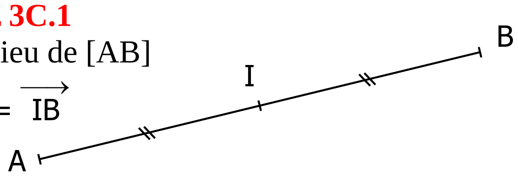
$\overrightarrow{IA}$; $\overrightarrow{AJ}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{IJ}$

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI

EXERCICE 3C.1

I est le milieu de [AB]

donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$



$\vec{u} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AI} = \vec{0}$

$\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI}$

$= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$

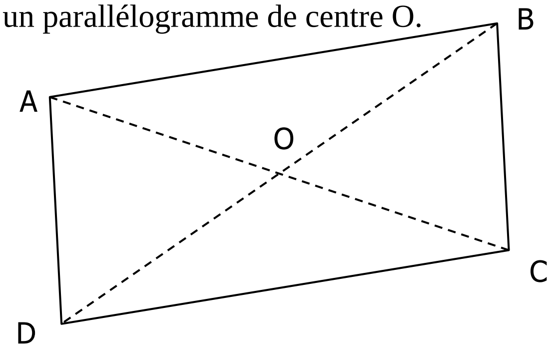
$\vec{w} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{NA} - \overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{IA}$

$= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{AN} + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) + \overrightarrow{IA}$

$= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN}$

EXERCICE 3C.2

ABCD est un parallélogramme de centre O.



$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Les diagonales se coupent en leur milieu.

$\vec{u} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0}$

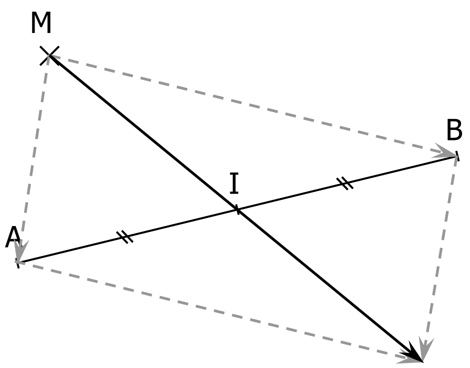
$\vec{v} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

$\vec{w} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$

$= \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

EXERCICE 3C.3

I milieu de [AB] donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$



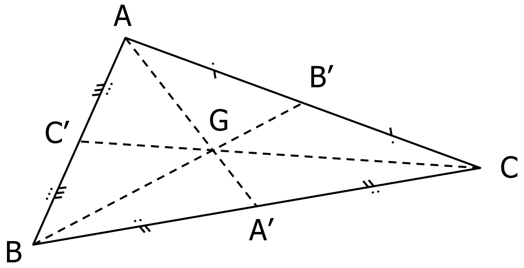
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$

$= 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI}$

EXERCICE 3C.4

G est le centre de gravité du triangle ABC, il se trouve aux deux tiers de la médiane en partant du sommet) : $3\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{A'A}$

A' est le milieu de [BC] donc $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$



$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}$

$= 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C}$

$= 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{A'A} + 2\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$

Autre approche :

Le centre de gravité vérifie :

$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

Ainsi :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}\right)$

$= 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$= 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AA'}$

Or $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ donc $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'A}$ et $3\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{A'A}$

Ainsi : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{A'A} + 2\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$

Autre approche :

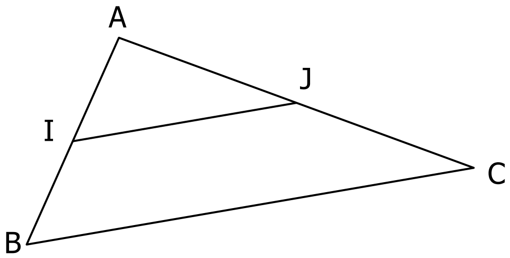
$\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

EXERCICE 3C.5

I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC].



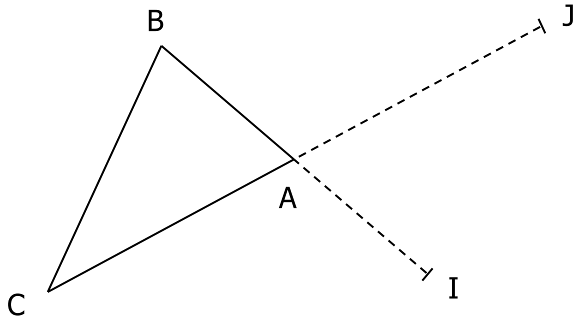
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$

$= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{IJ}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \\ &= 2\overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{AJ} \\ &= 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AJ} \\ &= 2\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}\right) \\ &= 2\overrightarrow{IJ}\end{aligned}$$

EXERCICE 3C.6

I et J sont les symétriques de B et C par rapport à A.



$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$