**Problèmes sur la projection orthogonale**

**Exercice 8C.1**

Soit ABC un triangle rectangle en A.

1) a) Quel est le projeté orthogonal de B sur (BC) ?
   b) Quel est le projeté orthogonal de C sur (AB) ?
2) a) Marquer le point H, projeté orthogonal de A sur (BC).
   b) Que représente [AH] pour le triangle ABC ?
3) a) Quel est le projeté orthogonal de [AC] sur (BC) ?
   b) Quel est le projeté orthogonal de [AB] sur (BC) ?

**Exercice 8C.2**

1) Tracer un triangle MNP, placer A milieu de [MN], puis le point C, pied de la hauteur issue de N.
2) Construire le projeté orthogonal B de A sur $(MP)$.
3) Démontrer que B est le milieu de $[MC]$.

**Exercice 8C.3**

On considère une droite d, un point A appartenant à cette droite et un point B n'appartenant pas à celle-ci. On appelle O le projeté orthogonal de B sur la droite d.

Les points A' et B' sont respectivement les symétriques des points A et B par rapport à O.

Quelle est la nature du quadrilatère ?

**Exercice 8C.4**

1) Tracer un parallélogramme ABCD de centre O.
2) Construire les points E et F, projetés orthogonaux respectifs de A et C sur (BD), et G et H, projetés orthogonaux respectifs de B et D sur (AC).
   Quelle est la nature du quadrilatère EGFH ? Justifier.

**Exercice 8C.5**

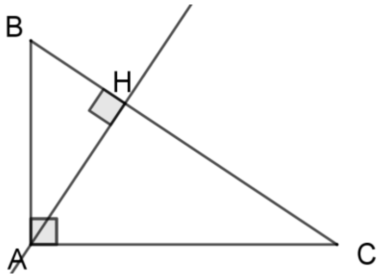
On considère un triangle équilatéral ABC et un point M à l'intérieur du triangle. On appelle $M_1$, $M_2$ et $M_3$ les projetés orthogonaux du point M sur les côtés du triangle ABC.

Montrer, en calculant des aires, que la somme $MM_1 + MM_2 + MM_3$ est constante.

(Vous le vérifierez sur un exemple avec Geogebra).

## Exercice 8C.1

*Soit ABC un triangle rectangle en A.*



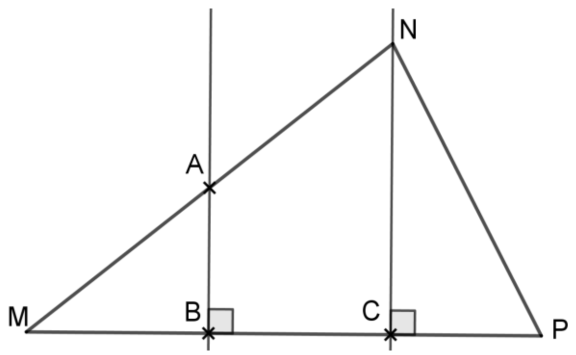

**1)** a) *Quel est le projeté orthogonal de B sur (BC) ?*
Il s'agit du point B.
b) *Quel est le projeté orthogonal de C sur (AB) ?*
Il s'agit du point A.

**2)** a) *Marquer le point H, projeté orthogonal de A sur (BC).*
b) *Que représente [AH] pour le triangle ABC ?*
$[AH]$ est une hauteur du triangle.

**3)** a) *Quel est le projeté orthogonal de [AC] sur (BC) ?*
Il s'agit du segment $[CH]$.
b) *Quel est le projeté orthogonal de [AB] sur (BC) ?*
Il s'agit du segment $[BH]$.

## Exercice 8C.2

**1)** *Tracer un triangle MNP, placer A milieu de [MN], puis le point C, pied de la hauteur issue de N.*




**2)** *Construire le projeté orthogonal B de A sur* $(MP)$.

**3)** *Démontrer que B est le milieu de* $[MC]$.

$(AB)\perp(MP)$ et $(NC)\perp(MP)$ donc $(AB)//(NC)$.

Les droites $(AN)$ et $(BC)$ sont sécantes en M et $(AB)//(NC)$, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{MA}{MN}=\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{NC}$$

Or A est le milieu de [MN] donc $MA=\frac{1}{2}MN \Leftrightarrow \frac{MA}{MN}=\frac{1}{2}$.

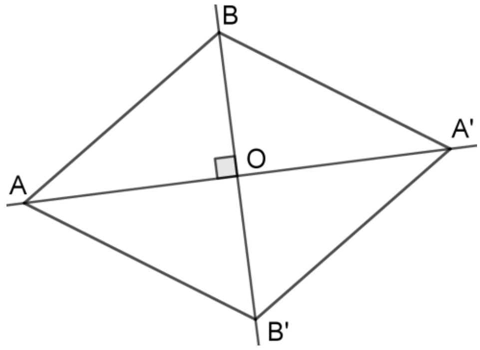
Ainsi : $\frac{MB}{MC}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow MB=\frac{1}{2}MC$ : B est le milieu de $[MC]$.

## Exercice 8C.3

*On considère une droite d, un point A appartenant à cette droite et un point B n'appartenant pas à celle-ci. On appelle O le projeté orthogonal de B sur la droite d.*

*Les points A' et B' sont respectivement les symétriques des points A et B par rapport à O.*

*Quelle est la nature du quadrilatère ?*

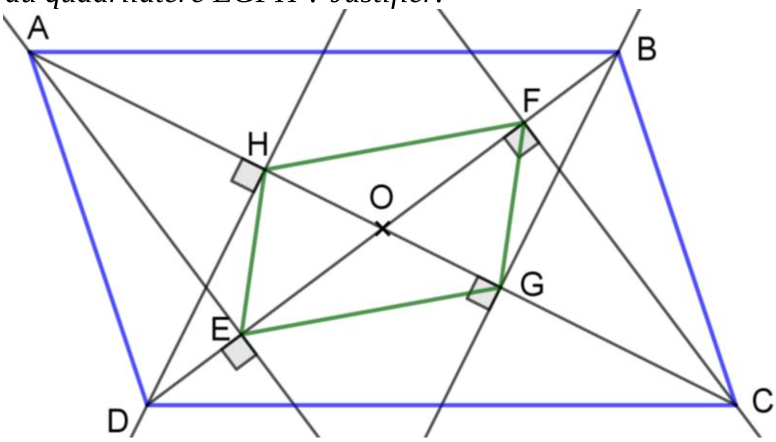



Les diagonales sont perpendiculaires et par symétrie, O est le milieu des diagonales $[AA']$ et $[BB']$.

Le quadrilatère ABA'B' est un losange.

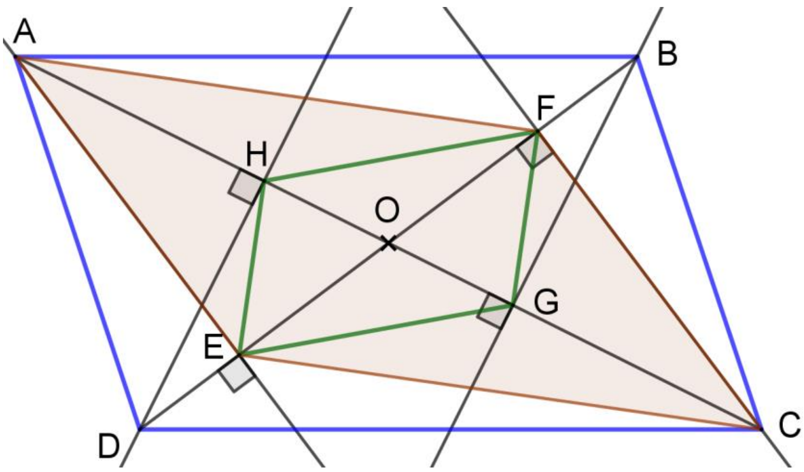
## Exercice 8C.5

1) *Tracer un parallélogramme ABCD de centre O.*
2) *Construire les points E et F, projetés orthogonaux respectifs de A et C sur (BD), et G et H, projetés orthogonaux respectifs de B et D sur (AC).*
   *Quelle est la nature du quadrilatère EGFH ? Justifier.*

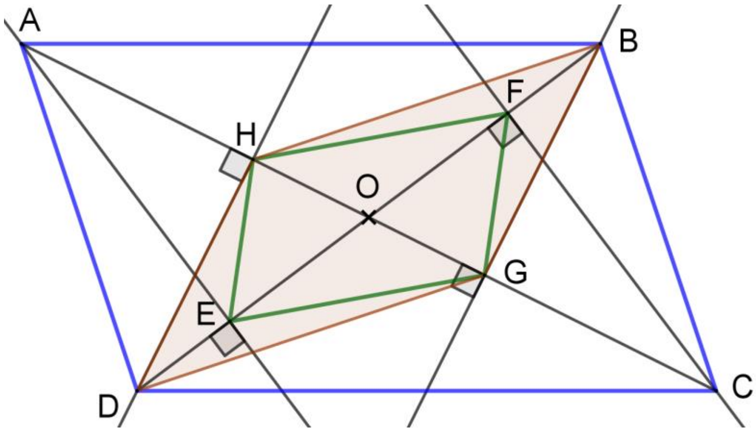



La diagonale $(BD)$ coupe le parallélogramme en deux triangles ABD et BCD identiques de même dimension. Donc leurs hauteurs sont de même dimension : AE = FC.

Ainsi les segments $[AE]$ et $[FC]$ sont parallèles et de même longueur et le quadrilatère AECF est un parallélogramme. On en déduit que O est le milieu de la diagonale $[EF]$.



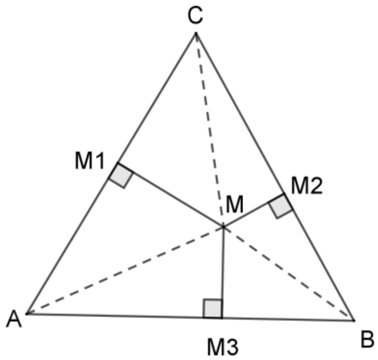
La diagonale $(AC)$ coupe le parallélogramme en deux triangles ABC et ACD identiques de même dimension. Donc leurs hauteurs sont de même dimension : BG = DH.
Ainsi les segments $[BG]$ et $[DH]$ sont parallèles et de même longueur et le quadrilatère DGBH est un parallélogramme. On en déduit que O est le milieu de la diagonale $[HG]$.




Ainsi O est le milieu des diagonales $[EF]$ et $[HG]$ : le quadrilatère EGFH est un parallélogramme.

## Exercice 8C.4

*On considère un triangle équilatéral ABC et un point M à l'intérieur du triangle. On appelle* $M_1$, $M_2$ *et* $M_3$ *les projetés orthogonaux du point M sur les côtés du triangle ABC.*
*Montrer, en calculant des aires, que la somme* $MM_1 + MM_2 + MM_3$ *est constante.*




Quelle que soit la position du point M, la somme des aires des trois triangles ABM, ACM et BCM est égale à l'aire totale du triangle.

$$\mathcal{A}_{ABM} + \mathcal{A}_{ACM} + \mathcal{A}_{BCM} = \mathcal{A}_{ABC}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{AB \times MM_3}{2} + \frac{AC \times MM_1}{2} + \frac{BC \times MM_2}{2} = \mathcal{A}_{ABC}$$

$$\Leftrightarrow \quad AB \times MM_3 + AC \times MM_1 + BC \times MM_2 = 2 \times \mathcal{A}_{ABC}$$

Or le triangle est équilatéral donc AB = AC = BC, ainsi :

$$AB \times \left(MM_1 + MM_2 + MM_3\right) = 2 \times \mathcal{A}_{ABC}$$

$$MM_1 + MM_2 + MM_3 = \frac{2 \times \mathcal{A}_{ABC}}{AB} = \text{constante}$$