Contrôle d'arithmétique

L'arithmétique, c'est être capable de compter jusqu'à vingt sans enlever ses chaussures. Walt Disney

En bonne arithmétique, un plus un égale tout et deux moins un égale rien. Ninon de Lenclos

Exercice 1 :
Soit a un entier naturel. Dans la division euclidienne de a par 7, on obtient un quotient double du reste.
Quelles sont les valeurs de a possibles ?

Exercice 2 :
1) Justifier que la somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3.
2) Soit n un entier naturel impair. Montrer que le nombre $B=5n^2-1$ est un entier naturel pair.
3) Montrer que si n est impair alors 4 est un diviseur de n^2+2n+5.

Exercice 3 :
On effectue à la calculatrice les calculs ci-dessous :

$$123^2-122^2-121^2+120^2=4$$
$$45^2-44^2-43^2+42^2=4$$

1) Tester ce résultat surprenant sur une autre série de quatre nombres consécutifs et émettre une conjecture.
2) Prouver que la conjecture précédemment faite est vraie.
3) Pour un entier naturel n, compléter les programmes en Python suivants pour qu'ils retournent l'entier 4.

Algorithme 1	**Algorithme 2**

def somme1(n) :
    Somme = n**2 – (n+1)**2 ... (n+2)**2 ... ………..
    return Somme
	def somme1(n) :
	    Somme = 0
	    for i in range(0,4) :
	        Signe = –1
	        if i==0 or i==3 :
	            Signe = +1
	        Somme = Somme + Signe * ……........…
	    return Somme

BONUS
On cherche un nombre naturel de trois chiffres, multiple de 9 et dont le quotient dans la division euclidienne par 21 est 33.
Déterminer le (ou les) nombre (ou nombres) solution (ou solutions).

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1 :

Soit a un entier naturel. Dans la division euclidienne de a par 7, on obtient un quotient double du reste. Quelles sont les valeurs de a possibles ?

La division euclidienne s'écrit, sachant que le quotient q est égal au double du reste r, soit $q=2r$:

$$\begin{array}{c|c} a & 7 \\ \hline r & 2r \end{array}$$

$$a=7\times 2r+r=14r+r=15r.$$

D'autre part, le reste doit être inférieur au diviseur, donc :

$r<7$, soit $r\in$ 0;6 ou $r\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$.

Si $r=0$, alors $a=15\times 0=0$
Si $r=1$, alors $a=15\times 1=15$
Si $r=2$, alors $a=15\times 2=30$
Si $r=3$, alors $a=15\times 3=45$
Si $r=4$, alors $a=15\times 4=60$
Si $r=5$, alors $a=15\times 5=75$
Si $r=6$, alors $a=15\times 6=90$

Exercice 2 :

4) *Justifier que la somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3.*
Soient n, $n+1$ et $n+2$ trois entiers consécutifs. Leur somme vaut :
$$n+(n+1)+(n+2)=n+n+1+n+2=3n+3=3\times n+3\times 1=3\times(n+1)$$
La somme de ces nombres est un multiple de trois et est divisible par trois.

5) *Soit n un entier naturel impair. Montrer que le nombre $B=5n^2-1$ est un entier naturel pair.*
n étant un entier naturel impair, il existe un entier naturel k tel que $n=2k+1$. Ainsi :
$$B=5(2k+1)^2-1=5\left((2k)^2+2\times 2k\times 1+1^2\right)-1=5\left(4k^2+4k+1\right)-1$$
$$=20k^2+20k+5-1=20k^2+20k+4=2\times 10k^2+2\times 10k+2\times 2$$
$$=2\times\left(10k^2+10k+2\right)$$
k étant un entier naturel, $10k^2+10k+2$ est aussi un entier naturel et $B=5n^2-1$ est un entier naturel pair.

6) *Montrer que si n est impair alors 4 est un diviseur de n^2+2n+5.*
n étant un entier naturel impair, il existe un entier naturel k tel que $n=2k+1$. Ainsi :
$$\begin{aligned} n^2+2n+5 &= (2k+1)^2+2(2k+1)+5 \\ &= 4k^2+4k+1+4k+2+5 \\ &= 4k^2+8k+8 \\ &= 4k^2+4\times 2k+4\times 2 \\ &= 4\left(k^2+2k+2\right) \end{aligned}$$
k étant un entier naturel, k^2+2k+2 est aussi un entier naturel et n^2+2n+5 est divisible par 4.

Exercice 3 :

On effectue à la calculatrice les calculs ci-dessous :

$$123^2-122^2-121^2+120^2=4$$
$$45^2-44^2-43^2+42^2=4$$

4) *Tester ce résultat surprenant sur une autre série de quatre nombres consécutifs et émettre une conjecture.*
$$4^2-3^2-2^2+1^2=16-9-4+1=4$$
$$5^2-4^2-3^2+2^2=25-16-9+4=4$$

On considère n, $n+1$, $n+2$ et $n+3$ quatre entiers consécutifs quelconque. On a :

$$(n+3)^2-(n+2)^2-(n+1)^2+n^2=4$$

5) *Prouver que la conjecture précédemment faite est vraie.*

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}(n+3)^2-(n+2)^2-(n+1)^2+n^2&=\left(n^2+6n+9\right)-\left(n^2+4n+4\right)-\left(n^2+2n+1\right)+n^2\\&=n^2+6n+9-n^2-4n-4-n^2-2n-1+n^2\\&=4\end{aligned}$$

6) *Pour un entier naturel n, compléter les programmes en Python suivants pour qu'ils retournent l'entier 4.*

<table>
<tr><th>Algorithme 1</th><th>Algorithme 2</th></tr>
<tr><td>

```
def somme1(n) :
    Somme = n**2 – (n+1)**2 – (n+2)**2 + (n+3)**2
    return Somme
```

</td><td>

```
def somme1(n) :
    Somme = 0
    for i in range(0,4) :
        Signe = –1
        if i==0 or i==3 :
            Signe = +1
        Somme = Somme + Signe * (n+i)**2
    return Somme
```

</td></tr>
</table>

BONUS

On cherche un nombre naturel de trois chiffres, multiple de 9 et dont le quotient dans la division euclidienne par 21 est 33.

Déterminer le (ou les) nombre (ou nombres) solution (ou solutions).

Soit a le nombre cherché à trois chiffres, a étant un multiple de 9, il existe un entier k tel que :

$$a=9k.$$

La division euclidienne s'écrit :

$$\begin{array}{c|c} 9k & 21 \\ \cline{2-2} r & 33 \end{array}$$

Donc : $9k=21\times33+r$

$\Leftrightarrow$ $9k=7\times3\times3\times11+r$

$\Leftrightarrow$ $9k=9\times7\times11+r$

$\Leftrightarrow$ $9k-9\times77=r$

$\Leftrightarrow$ $9(k-77)=r$

Ainsi le reste r est un multiple de 9 inférieur à 21 :

Si $r=0$, alors $a=21\times33+0=693$

Si $r=9$, alors $a=21\times33+9=702$

Si $r=18$, alors $a=21\times33+18=711$

Les trois solutions sont a = 693, a = 702 et a = 711.