

Seconde – Problèmes sur les équations

Exercice 4B.1

Résoudre l'équation : $8^{x^3} = 2^{x^2}$

Exercice 4B.2

Factoriser au maximum l'expression : $x^4 + 4y^4$.

Exercice 4B.3

Résoudre l'équation : $5^x + 5^{x+1} = 750$.

Exercice 4B.4

Résoudre l'équation : $a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} = 4$.

Exercice 4B.5

Résoudre l'équation : $\sqrt{x} + \sqrt{x^2} = \sqrt{x^3} + \sqrt{x^4}$.

Exercice 4B.6

Simplifier l'expression : $\sqrt{13 - \sqrt{105}}$.

Exercice 4B.7

Simplifier l'expression : $\sqrt{9999^2 + 19999}$.

Exercice 4B.8

Simplifier l'expression : $\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^{10}$.

Exercice 4B.9 Olympiades internationales de mathématiques

Résoudre l'équation : $a + b = \sqrt{21 + ab}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4B.10

Résoudre l'équation : $\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}}} = 2$.

Exercice 4B.11 Olympiades internationales de mathématiques

Résoudre le système :
$$\begin{cases} a - b = 11 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 11 \end{cases}$$

Exercice 4B.12 Olympiades internationales de mathématiques

Résoudre l'équation : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$, $x, y \in \mathbb{Z}^*$.

Exercice 4B.1

Résoudre l'équation : $8^{x^3} = 2^{x^2}$

$$8^{x^3} = 2^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow (2^3)^{x^3} = 2^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2^{3x^3} = 2^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 = x^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \times 3x - x^2 \times 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(3x-1) = 0$$

Soit : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Soit : $3x-1=0 \Leftrightarrow 3x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

Vérifications :

$$8^{0^3} = 1 = 2^{0^2}$$

$$8^{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3^3}} = 2^{3 \times \frac{1}{3^3}} = 2^{\frac{1}{3^2}} = 2^{\frac{1}{9}} \quad \text{et} \quad 2^{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 2^{\frac{1}{3^2}} = 2^{\frac{1}{9}}$$



Exercice 4B.2

Factoriser au maximum l'expression : $x^4 + 4y^4$.

$$x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y)^2 \rightarrow \text{il s'agit presque d'une identité remarquable}$$

$$x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2$$

$$= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$$

$$= (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$$

$$= (x^2 + 2xy + y^2 + y^2)(x^2 - 2xy + y^2 + y^2)$$

$$= ((x+y)^2 + y^2)((x-y)^2 + y^2)$$



Exercice 4B.3

Résoudre l'équation : $5^x + 5^{x+1} = 750$.

$$5^x + 5^{x+1} = 750$$

$$\Leftrightarrow 1 \times 5^x + 5 \times 5^x = 750$$

$$\Leftrightarrow (1+5) \times 5^x = 750$$

$$\Leftrightarrow 6 \times 5^x = 750$$

$$\Leftrightarrow 5^x = \frac{750}{6} = 125$$

$$\Leftrightarrow 5^x = 5^3$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Vérification :

$$5^3 + 5^{3+1} = 125 + 625 = 750$$

Exercice 4B.4 Résoudre l'équation : $a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} = 4$.

On remarque que : $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}$ et $\left(b - \frac{1}{b}\right)^2 = b^2 - 2 + \frac{1}{b^2}$.

L'équation initiale devient :

$$\begin{aligned} & \left(a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} + 2\right) + \left(b^2 - 2 + \frac{1}{b^2} + 2\right) = 4 \\ \Leftrightarrow & \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2 + \left(b - \frac{1}{b}\right)^2 + 2 = 4 \\ \Leftrightarrow & \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{b}\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

Or $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 \geq 0$ et $\left(b - \frac{1}{b}\right)^2 \geq 0$

Donc la relation $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{b}\right)^2 = 0$ implique :

$$\begin{cases} a - \frac{1}{a} = 0 \\ b - \frac{1}{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2 - 1}{a} = 0 \\ \frac{b^2 - 1}{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2 - 1^2}{a} = 0 \\ \frac{b^2 - 1^2}{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(a+1)(a-1)}{a} = 0 \\ \frac{(b+1)(b-1)}{b} = 0 \end{cases}$$

Ainsi les valeurs possibles de a sont 1 et -1 , il en est de même pour b .

Les seules solutions de l'équation $a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} = 4$ sont les couples $(a; b)$ appartenant à l'ensemble :

$$S = \{(1;1), (1;-1), (-1;1), (-1;-1)\}$$

Exercice 4B.5 Résoudre l'équation : $\sqrt{x} + \sqrt{x^2} = \sqrt{x^3} + \sqrt{x^4}$.

La variable x doit être positive.

$$\begin{aligned} & \sqrt{x} + \sqrt{x^2} = \sqrt{x^3} + \sqrt{x^4} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x} + x = x\sqrt{x} + x^2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x} + x - x\sqrt{x} - x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x} - x\sqrt{x} + x - x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x}(1-x) + x(1-x) = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{x} + x)(1-x) = 0 \end{aligned}$$

Soit $\sqrt{x} + x = 0$: la seule solution est $x = 0$, Soit $1 - x = 0$ soit : $x = 1$.

Les solutions sont : $S = \{0; 1\}$

Exercice 4B.6 Simplifier l'expression : $\sqrt{13 - \sqrt{105}}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{13 - \sqrt{105}} &= \sqrt{\frac{26 - 2\sqrt{21 \times 5}}{2}} = \sqrt{\frac{21 - 2\sqrt{21 \times 5} + 5}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{21})^2 - 2\sqrt{21 \times 5} + (\sqrt{5})^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{21} - \sqrt{5})^2}{2}} = \frac{\sqrt{21} - \sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{42} - \sqrt{10}}{2} \end{aligned}$$

Exercice 4B.7 Simplifier l'expression : $\sqrt{9999^2 + 19999}$.

Calculons séparément le contenu de la racine carrée :

$$\begin{aligned} 9999^2 + 19999 &= 9999^2 + 10000 + 9999 \\ &= 9999(9999 + 1) + 10000 \\ &= 9999 \times 10000 + 10000 \\ &= 10000(9999 + 1) \\ &= 10000^2 \end{aligned}$$

Ainsi : $\sqrt{9999^2 + 19999} = 10000$

Exercice 4B.8 Simplifier l'expression : $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{10}$.

On pose : $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow 2x &= 1+\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow 2x-1 &= \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^2 &= (\sqrt{3})^2 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 &= 3 \\ \Leftrightarrow 4x^2 &= 4x + 2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{4x+2}{4} = x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi : $x^{10} = (x^2)^5 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^5 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \times \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \times \left(x + \frac{1}{2}\right)$

Or : $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} = x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{4} = 2x + \frac{3}{4}$

Donc : $x^{10} = \left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 \times \left(x + \frac{1}{2}\right)$

Or : $\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 = 4x^2 + 3x + \frac{9}{16} = 4\left(x + \frac{1}{2}\right) + 3x + \frac{9}{16} = 7x + \frac{41}{16}$

Donc : $x^{10} = \left(7x + \frac{41}{16}\right) \times \left(x + \frac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow x^{10} = 7x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{41}{16}x + \frac{41}{32} = 7\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{56}{16}x + \frac{41}{16}x + \frac{41}{32}$$

$$\Leftrightarrow x^{10} = \frac{112}{16}x + \frac{112}{32} + \frac{56}{16}x + \frac{41}{16}x + \frac{41}{32} = \frac{209}{16}x + \frac{153}{32}$$

Or : $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi : $x^{10} = \frac{209}{16} \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{153}{32} = \frac{209}{32} + \frac{209\sqrt{3}}{32} + \frac{153}{32} = \frac{362 + 209\sqrt{3}}{32} = \frac{81}{16} + \frac{209\sqrt{3}}{32}$

Exercice 4B.9

Résoudre l'équation : $a + b = \sqrt{21 + ab}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

!!! Méthode à éviter !!! Erreur classique !!!

$$\begin{aligned}
 a + b &= \sqrt{21 + ab} \\
 \Leftrightarrow (a + b)^2 &= (\sqrt{21 + ab})^2 \\
 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 &= 21 + ab \\
 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 - ab &= 21 \\
 \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 &= 21 \\
 \Leftrightarrow 4a^2 + 4ab + 4b^2 &= 84 \\
 \Leftrightarrow 4a^2 + 4ab + b^2 + 3b^2 &= 84 \\
 \Leftrightarrow (2a + b)^2 + 3b^2 &= 81 + 3 \\
 \Leftrightarrow (2a + b)^2 - 9^2 + (\sqrt{3}b)^2 - (\sqrt{3})^2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (2a + b + 9)(2a + b - 9) + (\sqrt{3}b + \sqrt{3})(\sqrt{3}b - \sqrt{3}) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (2a + b + 9)(2a + b - 9) + 3(b + 1)(b - 1) &= 0
 \end{aligned}$$

Si : $b = 1$:

$$\begin{aligned}
 2a + b + 9 = 0 &\Leftrightarrow 2a = -9 - b = -10 \Leftrightarrow a = -5 \\
 2a + b - 9 = 0 &\Leftrightarrow 2a = 9 - b = 8 \Leftrightarrow a = 4
 \end{aligned}$$

Si : $b = -1$:

$$\begin{aligned}
 2a + b + 9 = 0 &\Leftrightarrow 2a = -9 - b = -8 \Leftrightarrow a = -4 \\
 2a + b - 9 = 0 &\Leftrightarrow 2a = 9 - b = 10 \Leftrightarrow a = 5
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(a, b) \in \{(-5; 1), (4; 1), (-4; -1), (5; -1)\}$$

Cette méthode est fautive : $(-4; -1)$ n'est pas solution

Cette méthode est incomplète, il manque les solutions : $(5; -4)$ et $(-4; 5)$.

Voici la bonne méthode classique :

Si a et b sont des entiers, alors $x = a + b$ et $y = a - b$ sont des entiers.

Dans ce cas, $a = \frac{x + y}{2}$ et $b = \frac{x - y}{2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 a + b &= \sqrt{21 + ab} \\
 \Leftrightarrow \frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{2} &= \sqrt{21 + \frac{x + y}{2} \times \frac{x - y}{2}} \\
 \Leftrightarrow x &= \sqrt{21 + \frac{x^2 - y^2}{4}} \quad \rightarrow x \text{ doit être positif.} \\
 \Leftrightarrow x^2 &= 21 + \frac{x^2 - y^2}{4} \\
 \Leftrightarrow 4x^2 &= 84 + x^2 - y^2 \\
 \Leftrightarrow 3x^2 + y^2 &= 84
 \end{aligned}$$

x étant un entier positif, testons les valeurs de x dans la relation précédente :

- Si $x = 0$: $\Leftrightarrow y^2 = 84 - 3 \times 0^2 = 84$: ce n'est pas un carré parfait.
- Si $x = 1$: $\Leftrightarrow y^2 = 84 - 3 \times 1^2 = 81$: deux solutions : $y = 9$ et $y = -9$
- Si $x = 2$: $\Leftrightarrow y^2 = 84 - 3 \times 2^2 = 72$: ce n'est pas un carré parfait.

- Si $x=3$: $\Leftrightarrow y^2 = 84 - 3 \times 3^2 = 57$: ce n'est pas un carré parfait.
- Si $x=4$: $\Leftrightarrow y^2 = 84 - 3 \times 4^2 = 36$: deux solutions : $y=6$ et $y=-6$
- Si $x=5$: $\Leftrightarrow y^2 = 84 - 3 \times 5^2 = 9$: deux solutions : $y=3$ et $y=-3$
- Si $x=6$: $\Leftrightarrow y^2 = 84 - 3 \times 6^2 = -24$: pas de solution réelle.

Or : $a = \frac{x+y}{2}$ et $b = \frac{x-y}{2}$. Ainsi :

$$\text{Si } x=1 \text{ et } y=9 : a = \frac{x+y}{2} = 5 \text{ et } b = \frac{x-y}{2} = -4.$$

$$\text{Si } x=1 \text{ et } y=-9 : a = \frac{x+y}{2} = -4 \text{ et } b = \frac{x-y}{2} = 5.$$

$$\text{Si } x=4 \text{ et } y=6 : a = \frac{x+y}{2} = 5 \text{ et } b = \frac{x-y}{2} = -1.$$

$$\text{Si } x=4 \text{ et } y=-6 : a = \frac{x+y}{2} = -1 \text{ et } b = \frac{x-y}{2} = 5.$$

$$\text{Si } x=5 \text{ et } y=3 : a = \frac{x+y}{2} = 4 \text{ et } b = \frac{x-y}{2} = 1.$$

$$\text{Si } x=5 \text{ et } y=-3 : a = \frac{x+y}{2} = 1 \text{ et } b = \frac{x-y}{2} = 4.$$

Les solutions entières sont :

$$(a,b) \in \{(5;-4), (-4;5), (5;-1), (-1;5), (4;1), (1;4)\}$$

Exercice 4B.10

Résoudre l'équation : $\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}}}} = 2$.

$$\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}}}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}}}} \right)^2 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \left(p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}}} \right)^2 = 4^2$$

$$\Leftrightarrow p^2 \times p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}} = 16$$

$$\Leftrightarrow \left(p^3 \sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}} \right)^2 = 16^2$$

$$\Leftrightarrow p^6 \times p\sqrt{p\sqrt{p}} = 256$$

$$\Leftrightarrow \left(p^7 \sqrt{p\sqrt{p}} \right)^2 = 256^2$$

$$\Leftrightarrow p^{14} \times p = 256^2$$

$$\Leftrightarrow p^{15} = (2^8)^2$$

$$\Leftrightarrow p^{15} = 2^{16}$$

$$\Leftrightarrow p = 2^{\frac{16}{15}}$$

Exercice 4B.11 Olympiades internationales de mathématiques

Résoudre le système :
$$\begin{cases} a - b = 11 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 11 \end{cases}$$

Classique : on pose : $x = \sqrt{a}$ et $y = \sqrt{b}$. On obtient :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ x + y = 11 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x + y)(x - y) = 11 \\ x + y = 11 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 11(x - y) = 11 \\ x + y = 11 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 11 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x = 12 \\ x + y = 11 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 6 \\ y = 11 - 6 = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Or : $x = \sqrt{a}$ et $y = \sqrt{b}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \sqrt{a} = 6 & \Leftrightarrow a = 36 \\ \sqrt{b} = 5 & \Leftrightarrow b = 25 \end{aligned}$$

La solution est :

$$(a, b) = (36; 25)$$

Exercice 4B.12 Olympiades internationales de mathématiques

Résoudre l'équation : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$, $x, y \in \mathbb{Z}^*$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}, \quad x, y \in \mathbb{Z}^* \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x} \times \frac{y}{y} + \frac{1}{y} \times \frac{x}{x} = \frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow & \frac{y}{xy} + \frac{x}{yx} = \frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow & \frac{y+x}{xy} = \frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow & 5(y+x) = 1 \times xy \\ \Leftrightarrow & 0 = xy - 5y - 5x \\ \Leftrightarrow & xy - 5y - 5x = 0 \\ \Leftrightarrow & x(y-5) - 5y = 0 \\ \Leftrightarrow & x(y-5) - 5(y-5) - 25 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-5)(y-5) = 25 \end{aligned}$$

Or $x, y \in \mathbb{Z}^*$, donc en utilisant le fait que : $25 = 5 \times 5 = (-5) \times (-5)$, on doit avoir :

$$\text{Soit } \begin{cases} x-5=5 \\ y-5=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5+5=10 \\ y=5+5=10 \end{cases}, \text{ soit : } \begin{cases} x-5=-5 \\ y-5=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5+5=0 \\ y=-5+5=0 \end{cases}.$$

Avec l'hypothèse $x, y \in \mathbb{Z}^*$, on obtient :

$$S = \{(10;10)\}$$