Seconde – Problèmes sur les équations

Exercice 4C.1 Résoudre les équations : $8^{x^3} = 2^{x^2}$ puis $x^{x^3} = 36$

Exercice 4C.2 Factoriser au maximum l'expression : $x^4 + 4y^4$.

Exercice 4C.3 Résoudre l'équation : $5^x + 5^{x+1} = 750$.

Exercice 4C.4 Résoudre l'équation : $a^2 + \dfrac{1}{a^2} + b^2 + \dfrac{1}{b^2} = 4$.

Exercice 4C.5 Résoudre l'équation : $\sqrt{x} + \sqrt{x^2} = \sqrt{x^3} + \sqrt{x^4}$.

Exercice 4C.6 Simplifier l'expression : $\sqrt{13 - \sqrt{105}}$.

Exercice 4C.7 Simplifier l'expression : $\sqrt{9999^2 + 19999}$.

Exercice 4C.8 Simplifier l'expression : $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{10}$.

Exercice 4C.9 **Olympiades internationales de mathématiques**
Résoudre l'équation : $a + b = \sqrt{21 + ab}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4C.10 Résoudre l'équation : $\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}}} = 2$.

Exercice 4C.11 **Olympiades internationales de mathématiques**
Résoudre le système : $\begin{cases} a - b = 11 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 11 \end{cases}$.

Exercice 4C.12 **Olympiades internationales de mathématiques**
Résoudre l'équation : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$, $x, y \in \mathbb{Z}^*$.

Exercice 4C.13 **Test pour Oxford**
Résoudre l'équation : $\left(\left(\left(x^2 - 1\right)^2 - 2\right)^2 - 3\right)^2 = 4$.

Exercice 4C.1

Résoudre l'équation : $8^{x^3} = 2^{x^2}$

$$
\begin{aligned}
& 8^{x^3} = 2^{x^2} \\
\Leftrightarrow\ & \left(2^3\right)^{x^3} = 2^{x^2} \\
\Leftrightarrow\ & 2^{3x^3} = 2^{x^2} \\
\Leftrightarrow\ & 3x^3 = x^2 \\
\Leftrightarrow\ & 3x^3 - x^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 \times 3x - x^2 \times 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2(3x-1) = 0
\end{aligned}
$$

Soit : $x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Soit : $3x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{3}$

Vérifications :

$$8^{0^3} = 1 = 2^{0^2}$$

$$8^{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3^3}} = 2^{3\times\frac{1}{3^3}} = 2^{\frac{1}{3^2}} = 2^{\frac{1}{9}} \quad \text{et} \quad 2^{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 2^{\frac{1}{3^2}} = 2^{\frac{1}{9}}$$

Résoudre l'équation : $x^{x^3} = 36$

$$
\begin{aligned}
& x^{x^3} = 36 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x^{x^3}\right)^3 = 36^3 \\
\Leftrightarrow\ & x^{3x^3} = \left(6^2\right)^3 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x^3\right)^{x^3} = 6^6 \\
\Leftrightarrow\ & x^3 = 6 \\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt[3]{6}
\end{aligned}
$$

Exercice 4C.2

Factoriser au maximum l'expression : $x^4 + 4y^4$.

$x^4 + 4y^4 = \left(x^2\right)^2 + (2y)^2$ → il s'agit presque d'une identité remarquable

$$
\begin{aligned}
x^4 + 4y^4 &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 \\
&= \left(x^2 + 2y^2\right)^2 - (2xy)^2 \\
&= \left(x^2 + 2y^2 + 2xy\right)\left(x^2 + 2y^2 - 2xy\right) \\
&= \left(x^2 + 2xy + y^2 + y^2\right)\left(x^2 - 2xy + y^2 + y^2\right) \\
&= \left((x+y)^2 + y^2\right)\left((x-y)^2 + y^2\right)
\end{aligned}
$$

Exercice 4C.3

Résoudre l'équation : $5^x + 5^{x+1} = 750$.

$$\begin{aligned} & 5^x + 5^{x+1} = 750 \\ \Leftrightarrow\ & 1\times 5^x + 5\times 5^x = 750 \\ \Leftrightarrow\ & (1+5)\times 5^x = 750 \\ \Leftrightarrow\ & 6\times 5^x = 750 \\ \Leftrightarrow\ & 5^x = \frac{750}{6} = 125 \\ \Leftrightarrow\ & 5^x = 5^3 \\ \Leftrightarrow\ & x = 3 \end{aligned}$$

Vérification :

$$5^3 + 5^{3+1} = 125 + 625 = 750$$

Exercice 4C.4

Résoudre l'équation : $a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} = 4$.

On remarque que : $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}$ et $\left(b - \frac{1}{b}\right)^2 = b^2 - 2 + \frac{1}{b^2}$.

L'équation initiale devient :

$$\begin{aligned} & \left(a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} + 2\right) + \left(b^2 - 2 + \frac{1}{b^2} + 2\right) = 4 \\ \Leftrightarrow\ & \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2 + \left(b - \frac{1}{b}\right)^2 + 2 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{b}\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

Or $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 \geq 0$ et $\left(b - \frac{1}{b}\right)^2 \geq 0$

Donc la relation $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{b}\right)^2 = 0$ implique :

$$\begin{cases} a - \frac{1}{a} = 0 \\ b - \frac{1}{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{a} - \frac{1}{a} = 0 \\ \frac{b^2}{b} - \frac{1}{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2 - 1^2}{a} = 0 \\ \frac{b^2 - 1^2}{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(a+1)(a-1)}{a} = 0 \\ \frac{(b+1)(b-1)}{b} = 0 \end{cases}$$

Ainsi les valeurs possibles de a sont 1 et -1, il en est de même pour b.

Les seules solutions de l'équation $a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} = 4$ sont les couples $(a;b)$ appartenant à l'ensemble :

$$S = \{(1;1),(1;-1),(-1;1),(-1;-1)\}$$

Exercice 4C.5

Résoudre l'équation : $\sqrt{x} + \sqrt{x^2} = \sqrt{x^3} + \sqrt{x^4}$.

La variable x doit être positive.

$$\begin{aligned} & \sqrt{x} + \sqrt{x^2} = \sqrt{x^3} + \sqrt{x^4} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x} + x = x\sqrt{x} + x^2 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x} + x - x\sqrt{x} - x^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \ \sqrt{x}-x\sqrt{x}+x-x^2=0$$
$$\Leftrightarrow \ \sqrt{x}(1-x)\sqrt{x}+x(1-x)=0$$
$$\Leftrightarrow \ \left(\sqrt{x}+x\right)(1-x)=0$$

Soit $\sqrt{x}+x=0$: la seule solution est $x=0$, Soit $1-x=0$ soit : $x=1$.

Les solutions sont : $S=\{0;1\}$

Exercice 4C.6 *Simplifier l'expression* : $\sqrt{13-\sqrt{105}}$.

$$\sqrt{13-\sqrt{105}}=\sqrt{\frac{26-2\sqrt{21\times 5}}{2}}=\sqrt{\frac{21-2\sqrt{21\times 5}+5}{2}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{21}\right)^2-2\sqrt{21\times 5}+\left(\sqrt{5}\right)^2}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{21}-\sqrt{5}\right)^2}{2}}=\frac{\sqrt{21}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{42}-\sqrt{10}}{2}$$

Exercice 4C.7 *Simplifier l'expression* : $\sqrt{9999^2+19999}$.

Calculons séparément le contenu de la racine carrée :

$$\begin{aligned}9999^2+19999&=9999^2+10\,000+9999\\&=9999(9999+1)+10\,000\\&=9999\times 10\,000+10\,000\\&=10\,000(9999+1)\\&=10\,000^2\end{aligned}$$

Ainsi : $\sqrt{9999^2+19999}=10\,000$

Exercice 4C.8 *Simplifier l'expression* : $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{10}$.

On pose : $x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Ainsi :

$$x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \ 2x=1+\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \ 2x-1=\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \ (2x-1)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \ 4x^2-4x+1=3$$
$$\Leftrightarrow \ 4x^2=4x+2$$
$$\Leftrightarrow \ x^2=\frac{4x+2}{4}=x+\frac{1}{2}$$

Ainsi : $x^{10}=\left(x^2\right)^5=\left(x+\frac{1}{2}\right)^5=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\times\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\times\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Or : $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+x+\frac{1}{4}=x+\frac{1}{2}+x+\frac{1}{4}=2x+\frac{3}{4}$

Donc : $x^{10}=\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2\times\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Or : $\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2=4x^2+3x+\frac{9}{16}=4\left(x+\frac{1}{2}\right)+3x+\frac{9}{16}=7x+\frac{41}{16}$

Donc : $x^{10}=\left(7x+\frac{41}{16}\right)\times\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow\ x^{10}=7x^2+\frac{7}{2}x+\frac{41}{16}x+\frac{41}{32}=7\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{56}{16}x+\frac{41}{16}x+\frac{41}{32}$

$\Leftrightarrow\ x^{10}=\frac{112}{16}x+\frac{112}{32}+\frac{56}{16}x+\frac{41}{16}x+\frac{41}{32}=\frac{209}{16}x+\frac{153}{32}$

Or : $x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi : $x^{10}=\frac{209}{16}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{153}{32}=\frac{209}{32}+\frac{209\sqrt{3}}{32}+\frac{153}{32}=\frac{362+209\sqrt{3}}{32}=\frac{81}{16}+\frac{209\sqrt{3}}{32}$

Exercice 4C.9

Résoudre l'équation : $a+b=\sqrt{21+ab}$, $a,b\in\mathbb{Z}$.

!!! Méthode à éviter !!! Erreur classique !!!

$a+b=\sqrt{21+ab}$

$\Leftrightarrow\ (a+b)^2=\left(\sqrt{21+ab}\right)^2$

$\Leftrightarrow\ a^2+2ab+b^2=21+ab$

$\Leftrightarrow\ a^2+2ab+b^2-ab=21$

$\Leftrightarrow\ a^2+ab+b^2=21$

$\Leftrightarrow\ 4a^2+4ab+4b^2=84$

$\Leftrightarrow\ 4a^2+4ab+b^2+3b^2=84$

$\Leftrightarrow\ (2a+b)^2+3b^2=81+3$

$\Leftrightarrow\ (2a+b)^2-9^2+\left(\sqrt{3}b\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\ (2a+b+9)(2a+b-9)+\left(\sqrt{3}b+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}b-\sqrt{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow\ (2a+b+9)(2a+b-9)+3(b+1)(b-1)=0$

Si : $b=1$:

$2a+b+9=0\ \Leftrightarrow\ 2a=-9-b=-10\ \Leftrightarrow\ a=-5$

$2a+b-9=0\ \Leftrightarrow\ 2a=9-b=8\ \Leftrightarrow\ a=4$

Si : $b=-1$:

$2a+b+9=0\ \Leftrightarrow\ 2a=-9-b=-8\ \Leftrightarrow\ a=-4$

$2a+b-9=0\ \Leftrightarrow\ 2a=9-b=10\ \Leftrightarrow\ a=5$

Ainsi :

$(a,b)\in\{(-5;1),(4;1),(-4;-1),(5;-1)\}$

Cette méthode est fausse : $(-4;-1)$ n'est pas solution

Cette méthode est incomplète, il manque les solutions : $(5;-4)$ et $(-4;5)$.

Voici la bonne méthode classique :

Si a et b sont des entiers, alors $x=a+b$ et $y=a-b$ sont des entiers.

Dans ce cas, $a=\dfrac{x+y}{2}$ et $b=\dfrac{x-y}{2}$. Ainsi :

$$a+b=\sqrt{21+ab}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=\sqrt{21+\frac{x+y}{2}\times\frac{x-y}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \quad x=\sqrt{21+\frac{x^2-y^2}{4}} \qquad \rightarrow x \text{ doit être positif.}$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2=21+\frac{x^2-y^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad 4x^2=84+x^2-y^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x^2+y^2=84$$

x étant un entier positif, testons les valeurs de x dans la relation précédente :

- Si $x=0$: $\Leftrightarrow$ $y^2=84-3\times0^2=84$: ce n'est pas un carré parfait.
- Si $x=1$: $\Leftrightarrow$ $y^2=84-3\times1^2=81$: deux solutions : $y=9$ et $y=-9$
- Si $x=2$: $\Leftrightarrow$ $y^2=84-3\times2^2=72$: ce n'est pas un carré parfait.
- Si $x=3$: $\Leftrightarrow$ $y^2=84-3\times3^2=57$: ce n'est pas un carré parfait.
- Si $x=4$: $\Leftrightarrow$ $y^2=84-3\times4^2=36$: deux solutions : $y=6$ et $y=-6$
- Si $x=5$: $\Leftrightarrow$ $y^2=84-3\times5^2=9$: deux solutions : $y=3$ et $y=-3$
- Si $x=6$: $\Leftrightarrow$ $y^2=84-3\times6^2=-24$: pas de solution réelle.

Or : $a=\dfrac{x+y}{2}$ et $b=\dfrac{x-y}{2}$. Ainsi :

Si $x=1$ et $y=9$: $a=\dfrac{x+y}{2}=5$ et $b=\dfrac{x-y}{2}=-4$.

Si $x=1$ et $y=-9$: $a=\dfrac{x+y}{2}=-4$ et $b=\dfrac{x-y}{2}=5$.

Si $x=4$ et $y=6$: $a=\dfrac{x+y}{2}=5$ et $b=\dfrac{x-y}{2}=-1$.

Si $x=4$ et $y=-6$: $a=\dfrac{x+y}{2}=-1$ et $b=\dfrac{x-y}{2}=5$.

Si $x=5$ et $y=3$: $a=\dfrac{x+y}{2}=4$ et $b=\dfrac{x-y}{2}=1$.

Si $x=5$ et $y=-3$: $a=\dfrac{x+y}{2}=1$ et $b=\dfrac{x-y}{2}=4$.

Les solutions entières sont :

$$(a,b)\in\{(5;-4),(-4;5),(5;-1),(-1;5),(4;1),(1;4)\}$$

Exercice 4C.10

Résoudre l'équation : $\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}}}=2$.

$$\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}}}=2$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}}}\right)^2=2^2$$

$$\Leftrightarrow \quad p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}}\right)^2 = 4^2$$

$$\Leftrightarrow \quad p^2 \times p\sqrt{p\sqrt{p}} = 16$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(p^3\sqrt{p\sqrt{p}}\right)^2 = 16^2$$

$$\Leftrightarrow \quad p^6 \times p\sqrt{p} = 256$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(p^7\sqrt{p}\right)^2 = 256^2$$

$$\Leftrightarrow \quad p^{14} \times p = 256^2$$

$$\Leftrightarrow \quad p^{15} = \left(2^8\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad p^{15} = 2^{16}$$

$$\Leftrightarrow \quad p = 2^{\frac{16}{15}}$$

Exercice 4C.11 **Olympiades internationales de mathématiques**

Résoudre le système : $\begin{cases} a-b=11 \\ \sqrt{a}+\sqrt{b}=11 \end{cases}$.

Classique : on pose : $x=\sqrt{a}$ et $y=\sqrt{b}$. On obtient :

$$\begin{cases} x^2-y^2=11 \\ x+y=11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x-y)=11 \\ x+y=11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11(x-y)=11 \\ x+y=11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=12 \\ x+y=11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=11-6=5 \end{cases}$$

Or : $x=\sqrt{a}$ et $y=\sqrt{b}$. Ainsi :

$$\sqrt{a}=6 \Leftrightarrow a=36$$

$$\sqrt{b}=5 \Leftrightarrow b=25$$

La solution est :

$$(a,b)=(36;25)$$

Exercice 4C.12 **Olympiades internationales de mathématiques**

Résoudre l'équation : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$, $x,\ y\in\mathbb{Z}^*$.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}\ ,\ x,\ y\in\mathbb{Z}^*$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{x}\times\frac{y}{y}+\frac{1}{y}\times\frac{x}{x}=\frac{1}{5}$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{y}{xy}+\frac{x}{yx}=\frac{1}{5}$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{y+x}{xy}=\frac{1}{5}$$
$$\Leftrightarrow\ 5(y+x)=1\times xy$$
$$\Leftrightarrow\ 0=xy-5y-5x$$
$$\Leftrightarrow\ xy-5y-5x=0$$
$$\Leftrightarrow\ x(y-5)-5y=0$$
$$\Leftrightarrow\ x(y-5)-5(y-5)-25=0$$
$$\Leftrightarrow\ (x-5)(y-5)=25$$

Or $x,\ y\in\mathbb{Z}^*$, donc en utilisant le fait que : $25=5\times5=(-5)\times(-5)=25\times1=(-25)\times(-1)$, on doit avoir :

soit $\begin{cases}x-5=5\\y-5=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5+5=10\\y=5+5=10\end{cases}$, soit : $\begin{cases}x-5=-5\\y-5=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5+5=0\\y=-5+5=0\end{cases}$,

soit $\begin{cases}x-5=25\\y-5=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=25+5=30\\y=1+5=6\end{cases}$, soit : $\begin{cases}x-5=-1\\y-5=-25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1+5=4\\y=-25+5=-20\end{cases}$

soit $\begin{cases}x-5=1\\y-5=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+5=6\\y=25+5=30\end{cases}$, soit : $\begin{cases}x-5=-25\\y-5=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-25+5=-20\\y=-1+5=4\end{cases}$

Avec l'hypothèse $x,\ y\in\mathbb{Z}^*$, on obtient :

$$S=\{(10;10);(30;6);(6;30);(4;-20);(-20;4)\}$$

Exercice 4C.13 **Test pour Oxford**

Résoudre l'équation : $\left(\left(\left(x^2-1\right)^2-2\right)^2-3\right)^2=4$.

Soit $\left(\left(x^2-1\right)^2-2\right)^2-3=2$ $\Leftrightarrow\ \left(\left(x^2-1\right)^2-2\right)^2=5$	Soit : $\left(\left(x^2-1\right)^2-2\right)^2-3=-2$ $\Leftrightarrow\ \left(\left(x^2-1\right)^2-2\right)^2=1$

Soit $\left(x^2-1\right)^2-2=\sqrt{5}$ $\Leftrightarrow\ \left(x^2-1\right)^2=2+\sqrt{5}$	Soit $\left(x^2-1\right)^2-2=-\sqrt{5}$ $\Leftrightarrow\ \left(x^2-1\right)^2=2-\sqrt{5}$ $2-\sqrt{5}<0$ →il n'y a pas de solution	Soit $\left(x^2-1\right)^2-2=1$ $\Leftrightarrow\ \left(x^2-1\right)^2=3$	Soit $\left(x^2-1\right)^2-2=-1$ $\Leftrightarrow\ \left(x^2-1\right)^2=1$

Etude de chaque situation :

A partir de $\left(x^2-1\right)^2=2+\sqrt{5}$:

Soit $x^2-1=\sqrt{2+\sqrt{5}} \iff x^2=1+\sqrt{2+\sqrt{5}}$

soit $x=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{5}}}$, soit $x=-\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{5}}}$

Soit $x^2-1=-\sqrt{2+\sqrt{5}} \iff x^2=1-\sqrt{2+\sqrt{5}}$

$1-\sqrt{2+\sqrt{5}}<0$: il n'y a pas de solution

A partir de $\left(x^2-1\right)^2=3$

Soit $x^2-1=\sqrt{3} \iff x^2=1+\sqrt{3}$

soit $x=\sqrt{1+\sqrt{3}}$, soit $x=-\sqrt{1+\sqrt{3}}$

Soit $x^2-1=-\sqrt{3} \iff x^2=1-\sqrt{3}$

$1-\sqrt{3}<0$: il n'y a pas de solution

A partir de $\left(x^2-1\right)^2=1$

Soit $x^2-1=1 \iff x^2=2$

soit $x=\sqrt{2}$, soit $x=-\sqrt{2}$

Soit $x^2-1=-1 \iff x^2=0 \iff x=0$

Ainsi :

$$S=\left\{\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{5}}};-\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{5}}};\sqrt{1+\sqrt{3}};-\sqrt{1+\sqrt{3}};\sqrt{2};-\sqrt{2};0\right\}$$